Équation d'une courbe

On se place dans un repère donné du plan.

I. Cas général

Précision On devrait préciser équation *cartésienne* d'une courbe. L'adjectif « cartésienne » est formé à partir du nom du mathématicien René Descartes. Il existe d'autres types d'équations de courbes, comme les équations *polaires* ou encore les équations *paramétriques*, qui ne sont pas abordées en seconde.

Principe Imaginons un point $M(x;y)$ libre tout d'abord de se promener dans le plan. Si l'on impose ensuite des conditions à ses coordonnées, sa liberté de mouvement sera restreinte et M ne pourra plus se déplacer que dans un certain domaine du plan. Lorsque la contrainte qui lie les coordonnées est une *égalité*, le point M sera (en général) obligé se déplacer sur une ligne courbe ; Et dans les cas simples, ce sera une ligne droite.

Définition

Soit (E) une égalité comprenant deux variables, traditionnellement notées x et y.

La « représentation graphique » de (E) est <u>l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient</u> (E). (x pour l'abscisse et y pour l'ordonnée.)

Si une figure $\mathscr{F}$ est la « représentation graphique » de (E), alors on dit que (E) est une **équation de** $\mathscr{F}$.

Remarques La figure en question est presque toujours une ligne, souvent courbe, parfois droite. C'est pourquoi on parle habituellement d'équation de courbe.

Pour tracer la courbe en question, on ne peut s'y prendre que **point par point** (sauf lorsqu'il s'agit d'un cercle ou d'une droite). Il s'agit de placer le plus de points possible, judicieusement répartis, puis de les relier à main levée en essayant, autant que faire se peut, de rendre le **galbe** de la courbe. Mais bien entendu, on n'obtient jamais, dans la pratique, la courbe « elle-même ».

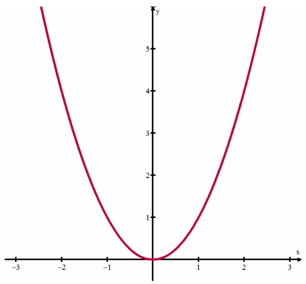
Le terme « représentation graphique » d'une égalité est peu usité, c'est pourquoi il est entre guillemets dans la définition.

L'équation d'une courbe n'est pas une équation dans l'**acception** connue jusqu'ici : il y a deux variables, mais une seule égalité. On ne cherche pas de solution. On peut toujours faire le lien entre les deux notions en disant que les « solutions » d'une égalité à deux variable sont des couples (première valeur pour x et seconde pour y) et que ces « couples-solutions » étant innombrables, on ne peut en faire la liste ; c'est pourquoi on les représente graphiquement.

Notation $\mathscr{F} : xy = 1$ se lit « soit $\mathscr{F}$ la courbe d'équation $xy = 1$ », ou bien « $\mathscr{F}$ est la courbe d'équation $xy = 1$ »

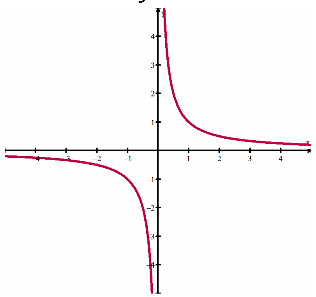
Exemples

$y = x^2$



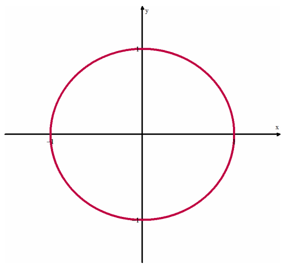
parabole

$xy = 1$



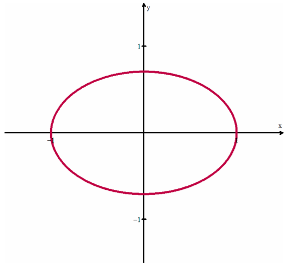
hyperbole

$x^2 + y^2 = 1$



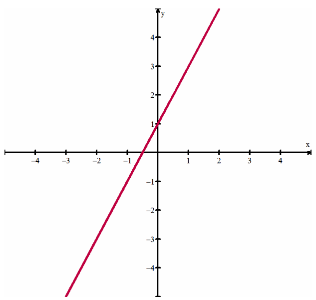
cercle

$x^2 + 2y^2 = 1$



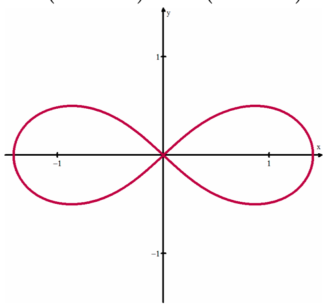
ellipse

$y = 2x + 1$



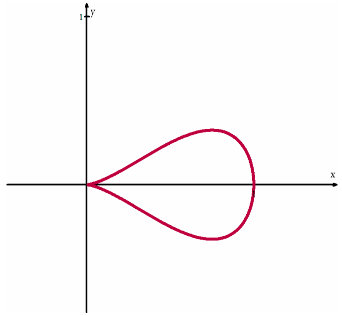
droite

$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$



lemniscate de Bernoulli

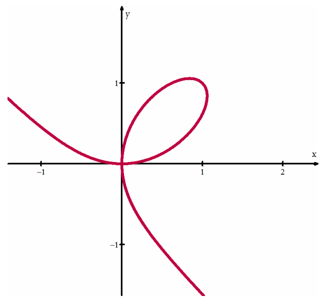
$y^2 = x^3(1 - x)$



quartique piriforme

(en forme de poire)

$x^3 + y^3 = 2xy$



folium de Descartes

II. Cas particulier des équations de droites

Théorème 1

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une unique équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont deux constantes réelles.

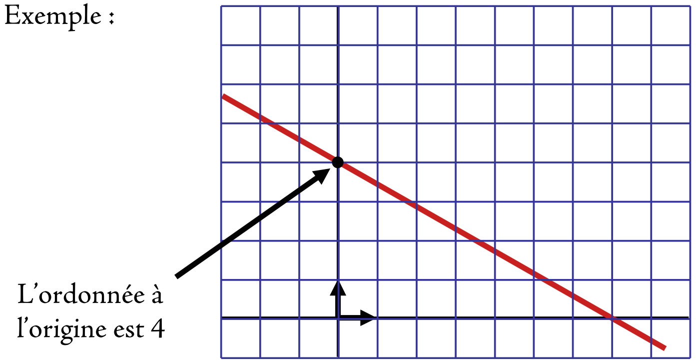
Et réciproquement, toute équation de la forme $y = ax + b$ est une équation de droite.

Exemple $y = 2x + 1$ est une équation de droite (voir paragraphe I).

Définition a se nomme alors le **coefficient directeur** de la droite et b son **ordonnée à l'origine**.

Remarque Dans l'égalité $y = ax + b$, lorsque x vaut 0, y vaut a. Donc l'ordonnée à l'origine (dont la dénomination est abusivement simplifiée) est en fait l'ordonnée du point d'intersection entre la droite considérée et l'axe des ordonnées.

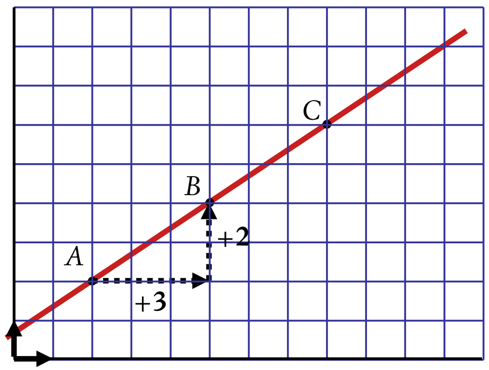
Exemple :



THÉORÈME 2

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan tels que (AB) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Le *coefficient directeur* de (AB) est : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

EXEMPLE



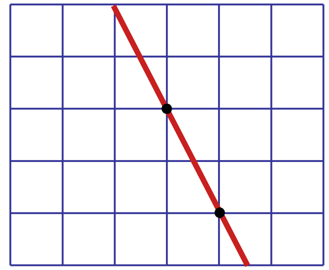
De A à B, on monte de 2 unités en ayant avancé de 3 unités. Le coefficient directeur, mesuré entre A et B est de $\dfrac{2}{3}$. Mesuré entre A et C, il est de $\dfrac{4}{6}$, ce qui revient au même.

REMARQUES

Lorsque, parcourue dans le sens de la lecture (sens positif de l'axe des abscisses), la droite « monte » (sens positif de l'axe des ordonnées) le coefficient directeur est positif ; lorsqu'elle « descend », il est négatif.

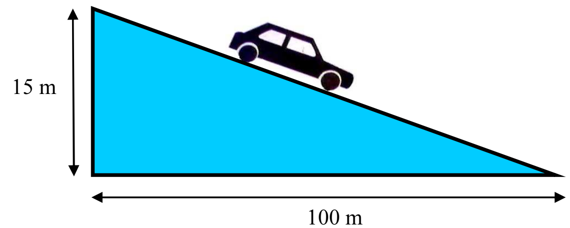
Exemple :

Droite de coefficient directeur égal à -2 :



Comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple, le quotient $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ ne dépend pas du choix des points A et B sur une droite donnée. Par exemple, si l'on permute les points A et B, le quotient garde le même signe (le numérateur et le dénominateur étant tous deux changés en leurs opposés).

Lorsque le repère est orthonormé, le coefficient directeur se nomme aussi la pente de la droite. Lorsqu'une route a une pente de 15%, cela signifie qu'on monte de 15m lorsqu'on avance <u>horizontalement</u> de 100m. Si l'on descend, on devrait dire que la pente est de -15%.



DÉMONSTRATIONS DES DEUX THÉORÈMES

EXISTENCE

Soit D une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts appartenant à D. Déterminons une équation de D, c'est-à-dire de (AB).

Soit $M(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}-x_A\\ \boldsymbol{y}-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ si et seulement si :

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{y}-y_A)(x_B-x_A) \;=\; (\boldsymbol{x}-x_A)(y_B-y_A)$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}-y_A \;=\; (\boldsymbol{x}-x_A)\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

(On a pu diviser par x_B-x_A car ce nombre est différent de 0. En effet, si x_A était égal à x_B, alors D serait parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas.)

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}-y_A \;=\; \boldsymbol{x}\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \;-x_A\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} \;=\; \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\,\boldsymbol{x} \;-x_A\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}+y_A$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}+b,$

en posant $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et $b=-x_A\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}+y_A$

Et alors $D:\ y=ax+b$

UNICITÉ

Considérons une droite D qui a pour équations $y=ax+b$ et

$y=a'x+b'$, où a, b, a' et b' sont des constantes. Démontrons qu'alors $a=a'$ et $b=b'$.

On pose $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$. Ces deux points appartiennent à D puisque leurs coordonnées vérifient la première équation. Mais comme ils appartiennent à D, leurs coordonnées doivent forcément vérifier aussi la deuxième équation. Donc :

$\begin{cases} b=a'\times 0+b' \\ a+b=a'\times 1+b' \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} b=b' \\ a+b=a'+b' \end{cases}$

En soustrayant la première égalité à la seconde, on obtient :

$\begin{cases} b=b' \\ a=a' \end{cases}$ Et c'est bien cela qu'il fallait démontrer.

RÉCIPROQUE

Soit $\mathfrak{F}$ une figure d'équation $y=ax+b$.

Il s'agit de prouver que $\mathfrak{F}$ est une droite.

Soient $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$. Remarquons que A et B appartiennent à $\mathfrak{F}$, puisque leurs coordonnées vérifient l'équation de $\mathfrak{F}$. Déterminons l'équation de (AB).

Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\ y-b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ si et seulement si :

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad x\times a=(y-b)\times 1$

$\Leftrightarrow \quad ax = y - b$

$\Leftrightarrow \quad y = ax + b$

La droite (AB) a même équation que $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} = (AB)$. Donc $\mathcal{F}$ est une droite.

COEFFICIENT DIRECTEUR

Dans la démonstration de l'existence, le *a*, qui est le coefficient directeur est bien égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Cas des droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Les droites parallèles à l'axe des ordonnées admettent une équation de la forme $x = k$, où k est une constante réelle.

Démonstration

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ donné, soit Δ une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Notons I le point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses. L'ordonnée de I est nulle. Notons k son abscisse : $I(k;0)$.

Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-k \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M \in \Delta$ si et seulement si :

$\overrightarrow{IM}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad (x-k)\times 1 = y \times 0$

$\Leftrightarrow \quad x - k = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = k}$

Caractérisation du parallélisme

Soient deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées).

Ces droites sont parallèles entre elles si et seulement si leurs *coefficients directeurs* sont égaux.

Démonstration

Soient donc D : $y = ax + b$ et D' : $y = a'x + b'$.

Les points $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$ appartient tous deux à D donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Les points $A'(0;b')$ et $B'(1;a'+b')$ appartient tous deux à D' donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'.

Donc D est parallèle à D' si et seulement si :

$a \times 1 = 1 \times a'$

$\Leftrightarrow \quad a = a'$

III. Glossaire

galbe — Profil harmonieux (plus ou moins courbe). De l'italien *garbo*, jolie forme, probablement de *garbare*, plaire.

acception — (Nom féminin.) Sens particulier d'un mot, signification.